TakiAcademy
www.takiacademy.com

Suite géométrique.

Définition:

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ une suite U définie sur I est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que $\forall n \in I$ on ait :

$$U_{n+1} = q \cdot U_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite U.

Ce qu'il faut savoir:

Soit U une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0.

- $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = q^n \cdot U_0$ (terme général)
- La somme des n premiers termes de cette suite est :

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} U_i$$

$$= 1^{er}\text{ terme} \left(\frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q} \right)$$

$$= U_0 \cdot \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1 - q}$$

$$= U_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exercice :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n - 1) \end{cases}$

1) Vérifier que U n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = U_n + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

a) Déterminer α de façon que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

b) Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$; $n\in\mathbb{N}^*$

Exprimer S_n en fonction de n

<< ——— >>

Rep: 1) $U_1 = \frac{1}{2}(U_0 - 1) = 0$

$U_2 = \frac{1}{2}(U_1 - 1) = -\frac{1}{2}$

on a $U_2 - U_1 = -\frac{1}{2}$ et $U_1 - U_0 = -1$

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$

Ainsi U n'est pas arithmétique

de même on montre que $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ donc n'est pas géométrique

2) a) $V_{n+1} = U_{n+1} + \alpha$

$= \frac{1}{2}(U_n - 1) + \alpha$

$= \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2} + \alpha$

$= \frac{1}{2}(U_n + \alpha) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$

$= \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Ainsi $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ssi :

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha = 0 \iff \boxed{\alpha = 1}$.

Conclusion : $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme $V_0 = U_0 + 1$

$\boxed{V_0 = 2}$

Ainsi $\boxed{V_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$V_n = U_n + 1 \iff U_n = V_n - 1$

$\iff \boxed{U_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

b) $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

$= \sum_{i=1}^{n} V_n - 1$

$= \sum_{i=1}^{n} V_n - \sum_{i=1}^{n} 1$

$= V_1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) - n$

or $V_n = 1$ donc $\boxed{S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - n}$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815